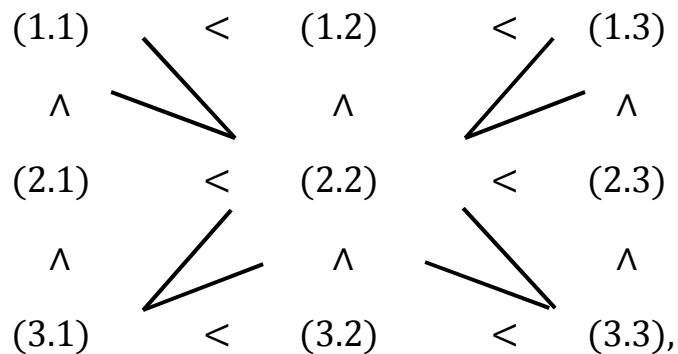


Isomorphie ontischer Orte von Quaternionen und qualitativen Zahlen

1. Der folgende Beitrag weist auf ein ganz erstaunliches Ergebnis hin. Wie man seit Toth (2015a, b) weiß, haben die qualitativen Zahlen, wie sie in der ortsfunktionalen Arithmetik, die Ontik und Semiotik zugrunde liegt, benutzt werden, die 2-Dimensionalität von Zahlenfeldern mit den komplexen Zahlen gemeinsam (und stehen somit beide der Peano-Linearität gegenüber). Das ist aber auch schon alles, denn im Gegensatz zu den komplexen Zahlen sind bereits die Subzeichen-Zahlen, die Bense (1975, S. 37) in der Form der sog. semiotischen Matrix eingeführt hatte, anordbar



während die komplexen Zahlen bekanntlich nicht-anordbar sind.

2. Ein Quaternion bzw. eine Hamilton-Zahl kann man durch das Quadrupel (in einer bewußt gewählten unüblichen Form)

$$R(\text{Quat}) = (\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k)$$

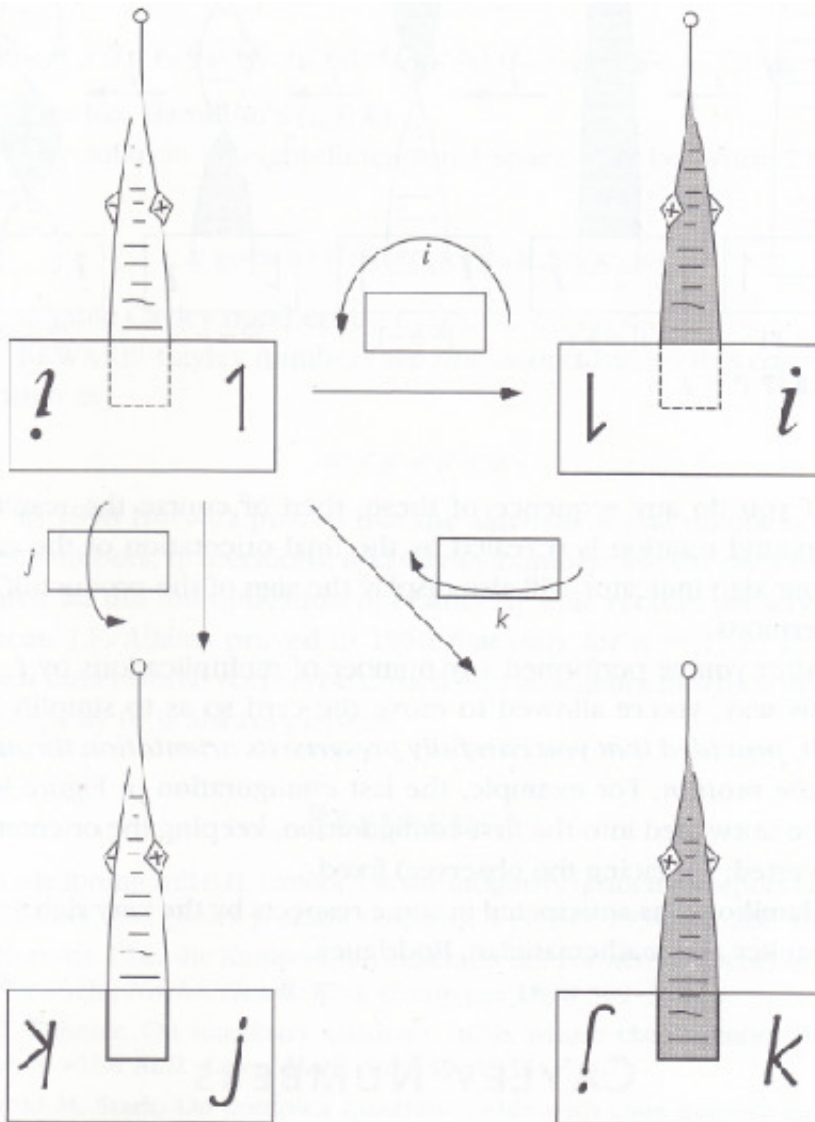
definieren. Diese sog. hyperkomplexe Zahl besteht also aus dem reellen Zahlenanteil 1 und drei differenzierbaren imaginären Zahlenanteilen i , j und k , wobei alle vier Glieder sowohl positiv als auch negativ auftreten können. Der Zusammenhang zwischen den Relata von R regeln die sog. Hamilton-Regeln:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= +k, \quad jk = +i, \quad ki = +j \\ ji &= -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j \end{aligned}$$

Ausführlich orientiert über alle 8×8 möglichen paarweisen reell-imaginären Produkte die folgende vollständige Tabelle.

	-1	<u>-i</u>	-j	-k	1	<u>i</u>	j	k
-1	1	<u>i</u>	j	k	-1	<u>-i</u>	-j	-k
<u>-i</u>	<u>i</u>	-1	k	-j	<u>-i</u>	1	-k	j
-j	j	-k	-1	<u>i</u>	-j	k	1	<u>-i</u>
-k	k	j	<u>-i</u>	-1	-k	-j	<u>i</u>	1
1	-1	<u>-i</u>	-j	-k	1	<u>i</u>	j	k
<u>i</u>	<u>-i</u>	1	-k	j	<u>i</u>	-1	k	-j
j	-j	k	1	<u>-i</u>	j	-k	-1	<u>i</u>
k	-k	-j	<u>i</u>	1	k	j	<u>-i</u>	-1

Wie Conway und Guy (1995, S. 233) gezeigt haben, kann man sowohl Paare von reellen und imaginären als auch von imaginären Zahlenanteilen von Quaternionen durch sog. "Quaternionenmaschinen" darstellen. Wie man aus der folgenden, äußerst suggestiven Darstellung Conways leicht ersieht, werden dabei die ontischen Orte der Relata der Quaternionen einerseits in der Oben-Unten-Relation und andererseits in der Links-Rechts-Relation vertauscht.



Vier Positionen der conwayschen Quaternionenmaschinen (Conway/Guy 1995, S. 233)

3. Dagegen wurde die qualitative ortsfunktionale Zahl in Toth (2015a, b) wie folgt definiert

$$R(\text{Qual}) = ((n \in \mathbb{N}), E, \omega),$$

darin n wie üblich eine natürliche Zahl ist, E den Einbettungsoperator

$$E: \quad n \rightarrow [n]$$

und ω den ontischen Ort einer Zahl angibt. Qualitative Zahlen sind also insofern "komplex", als sie sowohl ontisch als auch ordinativ (d.h. koordinativ, subordinativ oder superordinativ) verankerte Peanozahlen sind. Während also für Peanozahlen die strikte unvermittelte Linearität

$$L = [0, 1]$$

der logischen Basisdichotomie gilt, ergeben sich durch Anwendung von E die folgenden 4 möglichen Zahlenstrukturen

$$L_1 = [0, [1]] \quad L_2 = [[1], 0]$$

$$L_3 = [[0], 1] \quad L_4 = [1, [0]],$$

d.h. wir haben neben der koordinativen Zahlenstruktur L nun außerdem die subordinativ/superordinativen Zahlenstrukturen L_1 bis L_4 , für die natürlich außerdem $L_2 = L_1^{-1}$ und $L_4 = L_3^{-1}$ gilt. Das bedeutet also nicht anderes, als daß in L die beiden Zahlenwerte 0 und 1 funktionell unabhängig voneinander und daher beliebig austauschbar sind, während für L_1 bis L_4 gilt

$$0 = f(1)$$

$$1 = f(0).$$

Da aber E auch die ontischen Orte ω vertauscht, gilt nun außerdem

$$0 = f(1) \quad \neq \quad f(1) = 0$$

$$1 = f(0) \quad \neq \quad f(0) = 1.$$

Daraus folgt, daß es für alle drei möglichen Zählweisen in 2-dimensionalen Zahlenfeldern, d.h. für die horizontale, die vertikale und die beiden diagonalen Zählweisen, jeweils genau 4 mögliche Positionen gibt. In Toth (2015c-e), wo die qualitative Arithmetik eingeführt worden war, waren hierfür die "geometriefreien" Begriffe der adjazenten, subjazenten und transjazenten Zählweisen eingeführt worden. Ferner können, da die Werte 0 und 1 logisch durch die Objekt- und Subjektposition besetzt werden können, diese 4 Positionen verdoppelt aufscheinen, nämlich zusätzlich in perspektivischem Wechsel von einem kybernetischen Subjektstandpunkt aus betrachtet.

Die zweimal 4 möglichen Positionen für die adjazente Zählweise

x_i	y_j	y_i	x_j	y_j	x_i	x_j	y_i
\emptyset_i	\emptyset_j	\emptyset_i	\emptyset_j	\emptyset_j	\emptyset_i	\emptyset_j	\emptyset_i
	\times		\times		\times		
\emptyset_i	\emptyset_j	\emptyset_i	\emptyset_j	\emptyset_j	\emptyset_i	\emptyset_j	\emptyset_i
x_i	y_j	y_i	x_j	y_j	x_i	x_j	y_i

Die zweimal 4 möglichen Positionen für die subjazente Zählweise

x_i	\emptyset_j	\emptyset_i	x_j	\emptyset_j	x_i	x_j	\emptyset_i
y_i	\emptyset_j	\emptyset_i	y_j	\emptyset_j	y_i	y_j	\emptyset_i
	\times		\times		\times		
y_i	\emptyset_j	\emptyset_i	y_j	\emptyset_j	y_i	y_j	\emptyset_i
x_i	\emptyset_j	\emptyset_i	x_j	\emptyset_j	x_i	x_j	\emptyset_i

Die zweimal 4 möglichen Positionen für die transjazente Zählweise

x_i	\emptyset_j	\emptyset_i	x_j	\emptyset_j	x_i	x_j	\emptyset_i
\emptyset_i	y_j	y_i	\emptyset_j	y_j	\emptyset_i	\emptyset_j	y_i
	\times		\times		\times		
\emptyset_i	y_j	y_i	\emptyset_j	y_j	\emptyset_i	\emptyset_j	y_i
x_i	\emptyset_j	\emptyset_i	x_j	\emptyset_j	x_i	x_j	\emptyset_i

Sowohl bei den Quaternionen $R = R(\text{Quat}) = (\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k)$ als auch bei den qualitativen Zahlen $R(\text{Qual}) = ((n \in \mathbb{N}), E, \omega)$ werden also die Oben-Unten-Relationen und die Links-Rechts-Relationen gleichzeitig umgekehrt, d.h. die ontischen Orte von Quaternionen und von qualitativen Zahlen sind isomorph.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Conway, John H./Guy, Richard K., The Book of Numbers. New York 1995

Toth, Alfred, Definition der qualitativen Zahl. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015a

Toth, Alfred, Grundlegung einer qualitativen Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015b

Toth, Alfred, Zur Arithmetik der Relationalzahlen I-II. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015c

Toth, Alfred, Qualitative Arithmetik des Zählens auf drei. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015d

Toth, Alfred, Qualitative Zahlenfelder, Zahlenschemata und ontische Modelle. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015e

12.9.2015